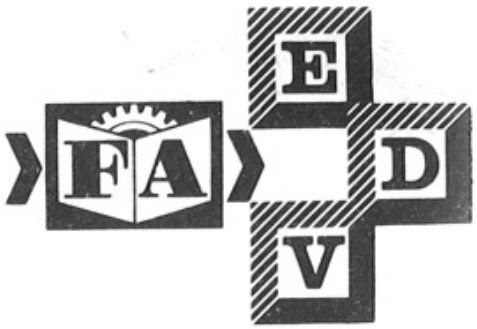
FERNSEHKURS DES DEUTSCHEN FERNSEHFUNKS



Themenkomplex 2

Mathematische und technische Grundlagen

Verlag Die Wirtschaft Berlin

Die Broschüre
entstand unter Verwendung
der Autorenmanuskripte des Fernsehkurses
"Elektronische Datenverarbeitung"

Die Manuskripte für die Lektionen 4 bis 7
wurden von Dr. J. Metz geschrieben

Die Überarbeitung
für die Veröffentlichung besorgten:

Klaus Bausdorf
Dr. Klaus Fischer
Ing. Egon Hofmann

Leiter des Autorenkollektivs: Ing. Egon Hofmann

Lektor: Dipl.-Hdl. Renate Eyraud

Redaktionsschluß: 20. Januar 1969

Verlag Die Wirtschaft, 1055 Berlin, Am Friedrichshain 22
1969 veröffentlicht · Lizenz-Nr. 122 · Druckgenehmigungs-Nr. 195/166/69
Alle Rechte vorbehalten
Schreibsatz: Verlag Die Wirtschaft, Berlin
Druck: Druckerei Tribüne, Berlin
ES 21 A · 0,90

Inhaltsverzeichnis

LEKTION 4

Informationsdarstellung

1. Einleitung 4
2. Technische Grundlagen der Informationsdarstellung 5
3. Mathematische Grundlagen der Informationsdarstellung 7

LEKTION 5

Informationsverknüpfung

1. Einleitung 12
2. Logistische Funktionen 13
3. Technische Realisierung der Funktionen 17
4. Entwurf einer Additionsschaltung 19

LEKTION 6

Informationsspeicherung

1. Einleitung 23
2. Speicherelemente 24
3. Anwendungen des Flip-Flops 28

LEKTION 7

Arithmetische Operationen

1. Einleitung 35
2. Zahlendarstellung 36
3. Grundrechenoperationen 40
4. Addition und Multiplikation im Dualsystem 44

LEKTION

4

Informationsdarstellung

1. Einleitung

2. Technische Grundlagen der Informationsdarstellung

2.1. Darstellung von Dezimalzahlen
2.2. Darstellung von Informationen durch Zeichenfolgen und Zustände von Bauelementen
2.3. Bauelemente der Elektrotechnik und Elektronik

3. Mathematische Grundlagen der Informationsdarstellung

3.1. Zahlendarstellung durch Binärzeichenkombinationen
3.2. Eigenschaften der Normalverschlüsselung

1. Einleitung

Im Mittelpunkt des Themenkomplexes "Mathematische und technische Grundlagen", der sich über 4 Lektionen erstreckt, stehen die Probleme der Informationsdarstellung, -verknüpfung und -speicherung. Die effektive Lösung dieser Probleme hat entscheidende Bedeutung für die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung und damit für die Schaffung des gesellschaftlichen Systems des Sozialismus, das die Anwendung der EDV in allen Bereichen unserer sozialistischen Gesellschaft objektiv erfordert.
In dieser Lektion konzentrieren wir uns auf die Informationsdarstellung in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen und befassen uns mit den Schwerpunkten:

- technische Grundlagen der Informationsdarstellung und
- mathematische Grundlagen der Informationsdarstellung.

Es werden nur solche Informationen betrachtet, die in Form von Daten auftreten, also als Ziffern, Buchstaben oder andere Zeichen mit festgelegter Bedeutung. Diese Daten können sowohl Befehle zur Steuerung der elektronischen Datenverarbeitungsanlage sein als auch Daten, die zur Verarbeitung eingegeben werden.

2. Technische Grundlagen der Informationsdarstellung

LEKTION

4

2.1. Darstellung von Dezimalzahlen

Wir gehen von dem uns geläufigen Dezimalsystem und seiner technischen Umsetzung in einem Buchungsautomaten aus.
Das Dezimalsystem ist ein Stellenwertsystem, dessen Basis die Zahl 10 ist.
Betrachten wir eine Dezimalzahl mit der Ziffernfolge 8 2 3 6.
Wir bewerten nicht nur die Ziffern schlechthin, sondern auch ihre Stellung innerhalb der Zahl. Jeder Stelle ist ein Stellenwert zugeordnet. Dieser Stellenwert ist eine Potenz der Basis 10. Wir unterscheiden danach Einer, Zehner, Hunderter, Tausender.

	Dezimalzahl			
Ziffernwert	8	2	3	6
Stellenwert	10^3 = 1000	10^2 = 100	10^1 = 10	10^0 = 1
	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer

Der tatsächliche Wert jeder Ziffer innerhalb einer Dezimalzahl ergibt sich durch die Multiplikation des Ziffernwertes mit der entsprechenden Zehnerpotenz, also dem Stellenwert.

$8 \cdot 10^3 = 8000,$
$2 \cdot 10^2 = 200,$
$3 \cdot 10^1 = 30,$
$6 \cdot 10^0 = 6.$

Die Dezimalzahl 8 2 3 6 ist die Summe von

$$8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Die allgemeine Summenformel für eine Dezimalzahl mit der Ziffernfolge

$$a_n\ a_{n-1} \cdots a_3\ a_2\ a_1$$

lautet

$$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0.$$

Kurzschreibweise

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 10^{i-1}$$

Dabei ist a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine der zehn Ziffern des Dezimalsystems, die an der i-ten Stelle der Dezimalzahl steht, n gibt die Anzahl der Stellen der Dezimalzahl an.
Betrachten wir nun die technische Darstellung von Dezimalzahlen in dem Buchungsautomaten Ascota 171, der im VEB Buchungsmaschinenwerke Karl-Marx-Stadt produziert wird. Dieser Automat wird für die verschiedensten Buchungsarbeiten und die Datenerfassung für die elektronische Datenverarbeitung eingesetzt. Der Automat verfügt über 2 bis 55 Zählwerke, die zur Darstellung von Zahlen in der Maschine dienen. Jedes Zählwerk besteht aus einer Reihe von nebeneinander angeordneten Ziffernrädchen, die entsprechend den Dezimalziffern 0, 1, ..., 9 je zehn verschiedene Stellungen

einnehmen können. Jedes Rädchen entspricht einer Stelle einer Dezimalzahl.
Beim Eintasten von Zahlen wird die Stellung der Zählwerke verändert. Jedes Rad wird entsprechend dem Wert der eingetasteten Ziffern weitergedreht.
Die Stellung des Zählwerkes, das das Ergebnis aufnimmt, kann in das Druckwerk übertragen und die Zahl ausgedruckt werden.
In diesem Fall werden die Dezimalziffern 0 bis 9 mit mechanischen Bauteilen dargestellt.

2.2. Darstellung von Informationen durch Zeichenfolgen und Zustände von Bauelementen

Informationen können auf verschiedene Weise dargestellt werden.
Bei einer mehrstelligen Dezimalzahl haben wir es mit einer Folge von Dezimalziffern zu tun.
Auch eine mathematische Rechenvorschrift ist eine Information, die als Folge von Zeichen geschrieben werden kann, zum Beispiel

$$(a + b)\, c - d.$$

Das bedeutet: Addiere die Zahlen a und b, multipliziere die Summe mit c und subtrahiere davon d.
Ein weiteres Beispiel wäre die Folge von Buchstaben, die den Text eines Romans oder eines Fachbuches bilden.

Wir können somit feststellen:

- Eine Information wird durch eine Folge von Zeichen dargestellt.

Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage wird dadurch erreicht, daß wir uns nicht auf Dezimalziffern beschränken, sondern auch andere Zeichen, wie mathematische Formelzeichen oder Buchstaben, zulassen. Außerdem legen wir uns nicht auf eine bestimmte Länge der Zeichenfolgen fest.
Beim Buchungsautomaten werden den einzelnen Dezimalstellen der Dezimalzahl Rädchen zugeordnet, deren Winkelstellungen den verschiedenen Dezimalziffern entsprechen. Es ist bekannt, daß in zunehmendem Maße elektronische Bauelemente die Funktion der Rädchen übernehmen. Diese Bauelemente sind dadurch gekennzeichnet, daß an bestimmten Anschlußklemmen elektrische Spannungen und Ströme beobachtet werden. Verschiedene Werte von Spannung oder Stromstärke entsprechen dann verschiedenen Winkelstellungen des Rädchens.

Wir halten fest:

- Jedem Zeichen werden Zustände physikalischer Objekte zugeordnet.

Diese Zustände der Bauelemente können wiederum zur Darstellung von Zeichen und somit zur Darstellung von Informationen verwendet werden.
Mechanische Elemente verfügen über eine unvermeidliche mechanische Trägheit und unterliegen einem starken Verschleiß. Möglichkeiten zu einer wesentlichen Verringerung der Schaltzeiten und Erhöhung der Zuverlässigkeit bieten nur die Elektrotechnik und Elektronik.

2.3. Bauelemente der Elektrotechnik und Elektronik

Das wichtigste elektromechanische Bauelement ist das Relais. Im Gegensatz zu den Ziffernrädchen der Zählwerke des Buchungsautomaten, die zehn verschiedene Stellungen für die Darstellung der zehn Dezimalziffern einnehmen können, verfügt das Relais nur über zwei Zustände:

- das Relais ist "gezogen",
- das Relais ist "abgefallen".

Diese beiden Zustände können zur Darstellung von Informationen genutzt werden.
Die Schaltzeiten sind mit dem Einsatz von Relais wesentlich zu senken. Sie betragen etwa 5 bis 10 Millisekunden für einen Schaltvorgang.
Wesentlich kürzere Schaltzeiten, Bruchteile von Mikrosekunden, und damit eine erheblich höhere Leistungsfähigkeit erhält man durch Verwendung elektronischer Bauelemente. Ohne sie wäre der Aufbau elektronischer Datenverarbeitungsanlagen, die Tausende bzw. Millionen Operationen in der Sekunde ausführen können, undenkbar.
Im Interesse einer hohen Zuverlässigkeit der Schaltungen bei möglichst niedrigem Aufwand verwendet man in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen zur Darstellung von Informationen ebenfalls Bauelemente, die nur durch zwei Schaltzustände charakterisiert sind.
Ein solches Bauelement ist der Modulbaustein, eine Entwicklung des VEB Keramische Werke Hermsdorf. Auf kleinstem Raum sind bei diesem Bauelement ein Transistor, mehrere Dioden, Widerstände und Kondensatoren untergebracht.
Solchen Bauelementen gehört zweifellos die Zukunft in der elektronischen Datenverarbeitung.

3. Mathematische Grundlagen der Informationsdarstellung

3.1. Zahlendarstellung durch Binärzeichenkombinationen

Wir gehen von der im Abschnitt 2.2. getroffenen Aussage, daß den Zeichen Zustände physikalischer Objekte zugeordnet werden, aus und stellen uns die Aufgabe, diese Zuordnung für die zehn Dezimalziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ unter Verwendung von Bauelementen mit nur zwei Schaltzuständen zu finden.
Wir betrachten zunächst ein Bauelement und kennzeichnen die zwei möglichen Zustände mit den Zeichen 0 und L, Binärzeichen genannt.

Binärzeichen	
0	} (x)
L	}

Ein Bauelement reicht offensichtlich zur Darstellung von zehn Dezimalziffern nicht aus.
Betrachten wir zwei voneinander unabhängige Bauelemente, so erhalten wir für die Zustände der Bauelementekombination die

Binärzeichenkombinationen		
0 0	L 0	} (xx)
0 L	L L,	}

insgesamt also vier verschiedene Kombinationen.
Wir erhalten sie, indem wir vor die Zeichen (x) zuerst 0 und dann L setzen.

Bei d r e i unabhangigen Bauelementen ergeben sich die

Binärzeichenkombinationen	
0 0 0	L 0 0
0 0 L	L 0 L
0 L 0	L L 0
0 L L	L L L,

indem wir vor die Kombinationen (xx) zuerst 0 und dann L setzen. Damit haben wir acht verschiedene Kombinationen.

Wir erkennen:

Bei Hinzunahme eines Bauelements verdoppeln sich jeweils die Kombinationen.

Bei vier Bauelementen ergeben sich also 16 verschiedene Binärzeichenkombinationen. Sie genügen zur Darstellung der 10 Dezimalziffern, es bleiben sogar sechs Kombinationen frei.
Zwischen den Binärzeichenkombinationen und den Dezimalziffern treffen wir folgende Zuordnung:

Binärzeichenkombinationen	Dezimalziffern	Binärzeichenkombinationen	Dezimalziffern
0 0 0 0	0	L 0 0 0	8
0 0 0 L	1	L 0 0 L	9
0 0 L 0	2	L 0 L 0	..
0 0 L L	3	L 0 L L	..
0 L 0 0	4	L L 0 0	..
0 L 0 L	5	L L 0 L	..
0 L L 0	6	L L L 0	..
0 L L L	7	L L L L	..

Die Kombinationen von vier Binärzeichen werden T e t r a d e n genannt. Die in der Tabelle angegebene spezielle Zuordnung zu den Dezimalziffern heißt N o r m a l v e r s c h l ü s s e l u n g.
Das Prinzip, zur Darstellung von Zeichen Kombinationen von Binärzeichen zu verwenden, läßt sich weiter ausbauen. Eine bestimmte Zuordnung derartiger Kombinationen zu bestimmten Zeichen wird C o d e genannt.
Ein Beispiel ist der Fernschreibcode. Hier werden Kombinationen von fünf Binärzeichen (32 mögliche Kombinationen) benutzt.
Beim Morsealphabet werden den Buchstaben des Alphabets und den Ziffern Kombinationen von kurzen und langen Signalen zugeordnet. Der Zusammenhang mit Binärzeichen ist auch hier deutlich.

Wir fassen zusammen:

Jede Information kann durch eine Folge von Binärzeichen dargestellt werden.

Damit haben wir die Rechtfertigung für die Verwendung von Schaltelementen mit nur zwei Zuständen in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen. Allerdings werden zur Darstellung einer Dezimalziffer mindestens vier Schaltelemente mit je zwei Zuständen benötigt. Aber dieser Mehraufwand wird durch die hohe Zuverlässigkeit und die Einfachheit im Aufbau solcher Schaltungen völlig aufgewogen.

B e i s p i e l e für die ziffernweise Verschlüsselung von Dezimalzahlen

Dezimalzahl 8 2 3 6
Verschlüsselung dieser Dezimalzahl
L000 00L0 00LL 0LL0

Dezimalzahl 8 9
Verschlüsselung dieser Dezimalzahl
L000 L00L

3.2. Eigenschaften der Normalverschlüsselung

Die in Abschnitt 3.1. gewählte Zuordnung zwischen Dezimalziffern und Binärzeichenkombinationen ist nicht zufällig.
Wir deuten das Binärzeichen 0 als "binäre Null", das Binärzeichen L als "binäre Eins". Mit dieser Betrachtungsweise stellt die Normalverschlüsselung ein Stellenwertsystem dar, dessen Stellenwerte Potenzen der Zahl 2 sind. Dieses Stellenwertsystem wird D u a l s y s t e m genannt. Die im Dualsystem ausgedrückten Zahlen heißen Dualzahlen.
Betrachten wir nun einige Beispiele, in denen jeweils zu einer vorgegebenen Binärzeichenkombination (Dualzahl) die zugehörige Dezimalzahl ermittelt werden soll.

BEISPIEL 1: Binärzeichenkombination L 0 0 L

In Analogie zum Abschnitt 2.1. für die Darstellung von Zahlen im Dezimalsystem haben wir hier

Ziffernwert	L	0	0	L
Stellenwert	2^3	2^2	2^1	2^0
	= 8	= 4	= 2	= 1.

Die Summation der Produkte (Ziffernwert multipliziert mit Stellenwert) ergibt

$$L \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + L \cdot 2^0$$
$$= 2^3 + 2^0$$
$$= 8 + 1$$
$$= 9.$$

Das Ergebnis stimmt mit der Normalverschlüsselung überein.

BEISPIEL 2: Binärzeichenkombination 0 L L L

Ziffernwert	0	L	L	L
Stellenwert	2^3	2^2	2^1	2^0
	= 8	= 4	= 2	= 1

Die Summation ergibt

$$\begin{aligned} & 0 \cdot 2^3 + L \cdot 2^2 + L \cdot 2^1 + L \cdot 2^0 \\ = \quad & 2^2 + 2^1 + 2^0 \\ = \quad & 4 + 2 + 1 \\ = \quad & 7. \end{aligned}$$

BEISPIEL 3: Binärzeichenkombination L 0 L L

Ziffernwert	L	0	L	L
Stellenwert	2^3	2^2	2^1	2^0

Summation

$$\begin{aligned} & L \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + L \cdot 2^1 + L \cdot 2^0 \\ = \quad & 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ = \quad & 8 + 2 + 1 \\ = \quad & 11 \end{aligned}$$

Die allgemeine Summenformel für eine Dualzahl der Form

$$b_n\, b_{n-1} \cdots b_3\, b_2\, b_1$$

lautet

$$b_n \cdot 2^{n-1} + b_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot 2^1 + b_1 \cdot 2^0.$$

Kurzschreibweise

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 2^{i-1}$$

b_i ist dabei entweder 0 oder L, je nachdem ob an der i-ten Stelle der Dualzahl eine "binäre Null" oder eine "binäre Eins" steht, n gibt die Anzahl der Ziffern der Dualzahl an. Mit dieser Formel ist es möglich, für jede Kombination von Binärzeichen die entsprechende Dezimalzahl zu finden.
Umgekehrt kann natürlich auch jeder Dezimalzahl als Ganzes die bestimmte Kombination von Binärzeichen zugeordnet werden.
Man nennt den Übergang von einer Darstellungsart zur anderen Konvertierung.
Geht man von der Dezimalzahl zur Dualzahl über, spricht man von Dezimal-Dual-Konvertierung, im umgekehrten Fall von einer Dual-Dezimal-Konvertierung.

Beispiel

Gegeben ist die Dezimalzahl 89.
Gesucht ist die zugehörige Dualzahl.
Lösung: Wir zerlegen die Zahl 89 in eine Summe von Zweierpotenzen. Die Zerlegung erfolgt schrittweise.

Im ersten Schritt wird die vorgegebene Zahl in eine Summe von zwei Zahlen zerlegt, deren eine die größte Zweierpotenz, die höchstens gleich der vorgegebenen Zahl sein soll, die andere den entsprechenden Rest darstellt.

Im zweiten Schritt wird der Rest in eine Summe von zwei Zahlen zerlegt, wobei eine Zahl wiederum die größte Zweierpotenz, die höchstens gleich dem Rest sein soll, und die andere den neuen Rest darstellt.
Die Zerlegung wird in der gleichen Weise so lange fortgeführt, bis kein Rest mehr übrigbleibt.

Mit Hilfe nachstehender Tabelle von Zweierpotenzen ist die Zerlegung im gegebenen Beispiel leicht durchzuführen.

2^0	= 1	2^4	= 16
2^1	= 2	2^5	= 32
2^2	= 4	2^6	= 64
2^3	= 8	2^7	= 128

1. Schritt: $89 = 2^6 + 25$

2. Schritt: Zerlegung des Restes 25 in die Summe $2^4 + 9$
$89 = 2^6 + 2^4 + 9$

3. Schritt: Zerlegung des Restes 9 in die Summe $2^3 + 1$
$89 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1$

Nach dem "Auffüllen" der in der Zerlegung nicht auftretenden Zweierpotenzen mit binären Nullen ergibt sich

$$89 = \underline{L} \cdot 2^6 + \underline{0} \cdot 2^5 + \underline{L} \cdot 2^4 + \underline{L} \cdot 2^3 + \underline{0} \cdot 2^2 + \underline{0} \cdot 2^1 + \underline{L} \cdot 2^0.$$

Wir können sofort ablesen:

89 = L0LL00L.

Zum Vergleich stellen wir die ziffernweise Verschlüsselung der Dezimalzahl 89 gegenüber (siehe Seite 9).
Sie ergibt

89 = L000 L00L.

Der Unterschied ist offensichtlich.

Beide Darstellungsarten sind gleich wichtig. Sie werden beide in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen verwendet. Der Vorteil der ziffernweisen Verschlüsselung, auch dezimal-duale Darstellung genannt, besteht in dem relativ geringen technischen Aufwand für die Konvertierung.
Der Vorteil, der Dezimalzahl als Ganzes eine Dualzahl zuzuordnen, auch reine Dualdarstellung genannt, liegt in der dichteren Packung der Information, das heißt in der niedrigeren Zahl benötigter Binärstellen.
Die Konvertierung von einem Zahlensystem in das andere wird maschinell in der Datenverarbeitungsanlage durchgeführt, so daß wir außerhalb der Maschinen mit dem uns geläufigen Dezimalsystem arbeiten können.

LEKTION

5

Informationsverknüpfung

1. Einleitung

2. Logistische Funktionen

2.1. Wertigkeit der Logik
2.2. Negation
2.3. Konjunktion und Disjunktion

3. Technische Realisierung der Funktionen

3.1. Negationsschaltung
3.2. Konjunktion (UND-Schaltung)
3.3. Disjunktion (ODER-Schaltung)

4. Entwurf einer Additionsschaltung

1. Einleitung

In der vorhergehenden Lektion behandelten wir einige mathematische und technische Grundlagen der Informationsdarstellung. Wir erarbeiteten uns damit die Voraussetzungen für das Verständnis der Informationsverknüpfung.
Die in eine elektronische Datenverarbeitungsanlage eingegebenen Daten werden innerhalb der Anlage als Folgen von Binärzeichen dargestellt. Durch die verschiedenen Verknüpfungsoperationen entstehen aus den Eingabedaten die gewünschten Ergebnisse oder die Ausgabedaten.

Verknüpfungsoperationen sind
- arithmetische Operationen,
- logische Operationen,
- organisatorische Operationen.

Um die Schaltelemente so zusammenfügen zu können, daß Verknüpfungsoperationen ausführbar sind, müssen wir uns mit einigen Grundbegriffen der Logik befassen.

In der Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelte der englische Mathematiker George Boole die Algebra der Logik, in der nur zwei Elemente, "wahr" oder "nicht wahr", "ja" oder "nein", unterschieden werden.

LEKTION

5

2. Logistische Funktionen

2.1. Wertigkeit der Logik

Eine Mitteilung soll etwas über das Eintreten eines Ereignisses von mehreren möglichen Ereignissen aussagen. Ist die Anzahl der möglichen Ereignisse gleich n, so spricht man von einer n-wertigen Logik, ist sie gleich zwei, haben wir es mit einer zweiwertigen Logik zu tun.
Die zweiwertige Logik ist für unsere Zwecke am besten geeignet, da man mit ihrer Hilfe durch schrittweise Annäherung zu gleichen Aussagen kommen kann wie bei der n-wertigen Logik.

Ein einfaches Beispiel soll dies erläutern:

Wenn nach dem Ausgang eines Fußballspieles gefragt wird, dann können drei verschiedene Antworten kommen:
Mannschaft A hat gewonnen.
Mannschaft A hat verloren.
Es wurde unentschieden gespielt.

Mit Hilfe der zweiwertigen Logik ist es möglich, sich mit zwei Fragen über den Ausgang des Fußballspieles zu informieren.

1. Frage: Ist das Spiel unentschieden ausgegangen?
2. Frage: Hat Mannschaft A gewonnen?

In der zweiwertigen Logik gibt es nur zwei mögliche Ereignisse, von denen eins eintritt. Deshalb kann es auch nur zwei Aussagen geben: "ja" oder "nein", "wahr" oder "unwahr", "0" oder "L".

Die Möglichkeit, Informationen durch eine Folge von den Binärzeichen 0 und L darzustellen, ist Voraussetzung dafür, in der elektronischen Datenverarbeitungstechnik Bauelemente einsetzen zu können, die nur zwei Zustände aufweisen.
Auch die Spannungen an den Eingängen und den Ausgängen von Verknüpfungsschaltungen nehmen nur je zwei Werte an, von denen meist der negative Spannungswert der 0, der positive Spannungswert dem L zugeordnet wird.
Den Informationen, die über die Eingänge in die Schaltung gelangen, wird eine Kombination dieser Eingangsspannungen zugeordnet. Entsprechendes gilt auch für die Information, die an den Ausgängen erscheint. Ihr wird eine Kombination von Ausgangsspannungen zugeordnet.
Um zu einer mathematischen Darstellung der Beziehungen zwischen Ausgängen und Eingängen von Verknüpfungsschaltungen zu kommen, müssen

Abbildung 1
Verknüpfungsschaltung mit Impulsen

LEKTION 5

wir uns mit zweiwertigen Variablen und zweiwertigen Funktionen befassen. Mit ihrer Hilfe ist eine Beschreibung des Verhaltens dieser Schaltungen möglich.
Die Boolsche Algebra ist die Grundlage der Schaltalgebra, mit deren Hilfe elektronische Datenverarbeitungsanlagen entworfen und gebaut werden. Die wichtigsten Operationen der Boolschen Algebra sind:

Negation,
Konjunktion,
Disjunktion.

2.2. Negation

Eine Schaltung ist im allgemeinen um so komplizierter, je größer die Zahl ihrer Eingänge und Ausgänge ist. Der einfachste Fall ist demnach eine Schaltung mit einem Eingang und einem Ausgang.
Mathematisch gesehen, entspricht diese Schaltung der Darstellung zweiwertiger Funktionen von nur einer zweiwertigen Veränderlichen. Die Veränderliche entspricht dem Eingang, an den zwei verschiedene Spannungswerte angelegt werden können. Zur mathematischen Beschreibung dieses Verhaltens der Schaltung ordnen wir dem Eingang die Variable x, die zweiwertig ist, zu. Für x kann wahlweise 0 oder L eingesetzt werden.

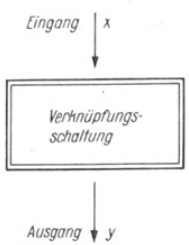


Abbildung 2
Schaltung mit einem Eingang und einem Ausgang

Dem Ausgang ordnen wir die zweiwertige Variable y zu. y ist von x abhängig; y ist eine Funktion von x.

$$y = f(x)$$

Für die Abhängigkeit des y von x, also der Ausgangsspannung von der Eingangsspannung, gibt es vier Möglichkeiten.

1. Möglichkeit

Dem Ausgang y wird der negative Spannungswert, die binäre 0, zugeordnet, unabhängig davon, ob am Eingang der negative Spannungswert 0 oder der positive Spannungswert L anliegt.

x	y
0	0
L	0

2. Möglichkeit

Am Ausgang y erscheint stets die gleiche Spannung, die auch am Eingang x anliegt.

x	y
0	0
L	L

3. Möglichkeit

Liegt am Eingang x der negative Spannungswert an, x = 0, erscheint am Ausgang y der positive Spannungswert, also y = L, und umgekehrt, wenn am Eingang x der positive Spannungswert anliegt, x = L, wird der Ausgang y negativ, also y = 0.

x	y
0	L
L	0

4. Möglichkeit

Dem Ausgang y wird, unabhängig vom Eingang x, der positive Spannungswert zugewiesen.

x	y
0	L
L	L

Wir erhalten also vier verschiedene zweiwertige Funktionen von einer zweiwertigen Variablen.
Bei der dargestellten 3. Möglichkeit entspricht y immer dem Gegenteil von x. Diese Funktion heißt Negation (Verneinung).

Durch Negation wird dem Wert 0 der Variablen der Funktionswert L, dem Wert L der Funktionswert 0 zugeordnet; y entspricht immer dem Gegenteil von x.

Die Negation wird durch Überstreichen gekennzeichnet:

$$y = \overline{x}$$

oder unter Verwendung von Binärzeichen

$\overline{0} = L$
$\overline{L} = 0.$

Schaltungszeichen für Negation:

2.3. Konjunktion und Disjunktion

Betrachten wir nun Schaltungen mit zwei Eingängen und Funktionen zweier Veränderlicher.
Abbildung 3 zeigt eine Schaltung, die über zwei Eingänge und einen Ausgang verfügt.
Zur mathematischen Betrachtung ordnen wir den beiden Eingängen die zweiwertigen Variablen x_1 und x_2 zu. Für den Ausgang wählen wir wieder y.

y ist demnach eine zweiwertige Funktion von x_1 und x_2.

Es bestehen 16 Möglichkeiten, den vier Wertekombinationen für x_1 und x_2 Funktionswerte 0 oder L für y zuzuordnen. Zwei Funktionen wollen wir näher betrachten.

Abbildung 3
Schaltung mit zwei Eingängen und einem Ausgang

In nachstehender Funktionstabelle ist y dann L, wenn sowohl x_1 als auch x_2 den Wert L haben.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	L	0
L	0	0
L	L	L

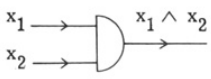
Diese Funktion bezeichnen wir mit "Konjunktion" oder "UND-Verknüpfung". Fassen wir die Funktionswerte 0 und L als duale Ziffern auf, so stellt die Konjunktion die Multiplikation von zwei Dualziffern dar.

Unter Konjunktion verstehen wir eine Funktion, die dann den Wert L hat, wenn auch die beiden Variablen x_1 und x_2 den Wert L angenommen haben. Die Konjunktion kennzeichnet den Zustand "UND".

Wir verwenden folgende Schreibweise:

$$y = x_1 \wedge x_2$$

Schaltungszeichen für Konjunktion:



Die zweite Möglichkeit zeigt folgende Funktionstabelle:

x_1	x_2	y
0	0	0
0	L	L
L	0	L
L	L	L

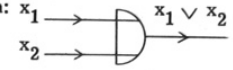
In dieser Funktionstabelle ist y gleich L, wenn entweder x_1 oder x_2 oder beide gleich L sind.
Diese Funktion heißt "Disjunktion" oder "ODER-Verknüpfung". Werden die Funktionswerte 0 und L als Dualziffern aufgefaßt, so stellen die ersten 3 Zeilen der Funktionstabelle der Disjunktion die Addition von Dualziffern dar.

Unter Disjunktion verstehen wir eine Funktion, die dann den Wert L hat, wenn entweder die Variable x_1 oder x_2, oder beide den Wert L angenommen haben. Die Disjunktion kennzeichnet den Zustand "ODER".

Wir verwenden folgende Schreibweise:

$$y = x_1 \vee x_2$$

Schaltungszeichen für Disjunktion:



LEKTION 5

3. Technische Realisierung der Funktionen

3.1. Negationsschaltung

Eine Schaltung, die die Negation einer Variablen realisiert, wird als Negator oder Negationsglied bezeichnet.
Unter Verwendung eines Schalters mit einem Ruhestromkontakt ist eine Negationsschaltung einfach zu realisieren. Durch Negation wird demnach bei Arbeitsstellung des Schalters kein Impuls weitergeleitet, während bei Ruhestellung ein Impuls weitergeleitet wird.
Als Beispiel für ein Negationsglied wollen wir eine Transistorschaltung betrachten. Diese Schaltung besteht im wesentlichen aus einem Transistor und zwei Widerständen.

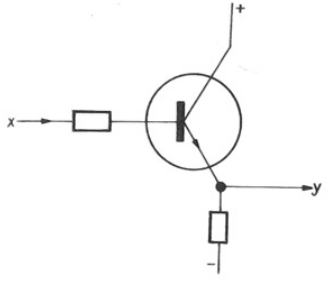


Abbildung 4
Transistorschaltung als Negator

Liegt bei x der Funktionswert 0 an, so erscheint durch Negation am Ausgang y ein L, umgekehrt erscheint am Ausgang y eine 0, wenn am Eingang x ein L anliegt.
In elektronischen Datenverarbeitungsanlagen werden Negationsglieder benötigt, um eine Eingangsgröße L in 0 zu verwandeln oder umgekehrt.

3.2. Konjunktion (UND-Schaltung)

Auch die Konjunktion läßt sich technisch einfach realisieren.
Als Schaltelemente nehmen wir zwei hintereinandergeschaltete einfache Schalter S_1 und S_2, die den Variablen x_1 und x_2 entsprechen; als Ausgang dient eine leitende Verbindung zu einer Lampe, die y entsprechen soll.
Die beiden Schalter S_1 und S_2 können zwei Stellungen einnehmen:
Arbeitsstellung – der Impuls wird weitergeleitet,
Ruhestellung – der Impuls wird nicht weitergeleitet.

Wir ordnen der Arbeitsstellung, Schalter ist geschlossen, L und der Ruhestellung, Schalter ist geöffnet, 0 zu.

LEKTION 5

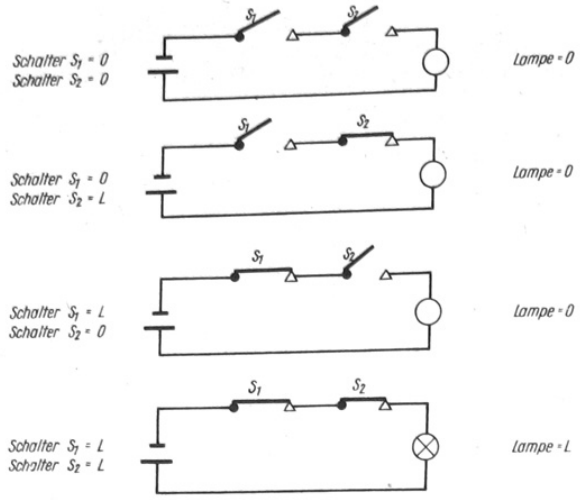


Abbildung 5
Schaltermodell der Konjunktion

Nur wenn der Schalter S_1 und der Schalter S_2 sich in Arbeitsstellung befinden, leuchtet die Lampe auf.
Durch Reihenschaltung zweier Schaltelemente wird die Konjunktion realisiert.

3.3. Disjunktion (ODER-Schaltung)

Auch für die technische Realisierung der Disjunktion benutzen wir die beiden Schalter S_1 und S_2 und die Lampe; allerdings schalten wir die Schalter nicht in Reihe, sondern parallel.

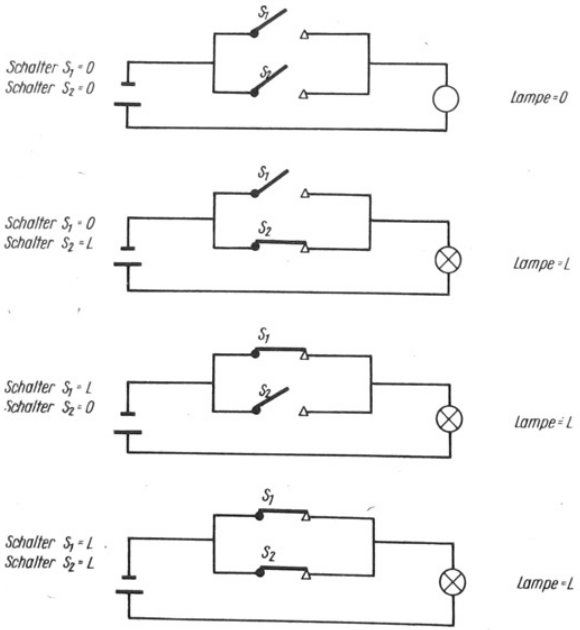


Abbildung 6
Schaltermodell der Disjunktion

Nur wenn der Schalter S_1 oder der Schalter S_2 oder beide Schalter sich in Arbeitsstellung befinden, leuchtet die Lampe.
Durch Parallelschaltung zweier Schaltelemente wird die Disjunktion realisiert.

LEKTION 5

In modernen elektronischen Datenverarbeitungsanlagen werden zur technischen Realisierung Transistoren, Dioden und Widerstände benutzt. Mit diesen Bauelementen werden auf einer Steckkarte eine ganze Reihe von Grundschaltungen für Negation, Konjunktion und Disjunktion angeordnet. So kommt man mit wenig Platz und kurzen Verbindungen aus.
Mit Hilfe der drei Grundschaltungen ist es möglich, jede beliebige funktionelle Abhängigkeit der Ausgänge von den Eingängen zu realisieren.

Jede zweiwertige Funktion von zweiwertigen Variablen kann durch die drei Grundoperationen Negation, Konjunktion oder Disjunktion dargestellt werden.

4. Entwurf einer Additionsschaltung

Die gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen es, eine Schaltung zu entwerfen, die die Addition zweier Dualzahlen ausführen kann. Mittels dieser Schaltung soll die Addition

$$a + b = c$$

realisiert werden, wobei für a und b der Einfachheit halber nur eine Stelle gewählt wird.

Wenn a = 0 und
b = 0 ist, dann ist a + b, also c, ebenfalls 0.

Ist a = 0 und
b = L, dann ist a + b, also c, gleich L.

Dasselbe ergibt sich, wenn
a = L und
b = 0 ist; a + b, also c, ist dann ebenfalls gleich L.

Wenn jedoch
a = L und
b = L ist, dann ist a + b, also c, gleich L0, das heißt, es ist ein Übertrag in die nächsthöhere Stelle erforderlich, wie es vom Rechnen mit Dezimalzahlen bekannt ist. Die Stellenzahl von c ist im ungünstigsten Fall größer als die von a und b.
Zur Realisierung der Schaltung sind neben den beiden Eingängen a und b auch zwei Ausgänge notwendig, ein Ausgang "S" für die Summe und ein Ausgang "Ü" für den Übertrag.
Ausgangspunkt für die Entwicklung der Additionsschaltung für die Addition zweier einstelliger Binärzahlen ist Tabelle 1.

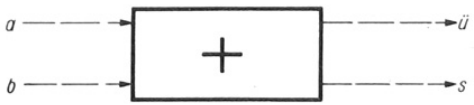


Abbildung 7
Blockdarstellung der Additionsschaltung

a	b	Ü	S
0	0	0	0
0	L	0	L
L	0	0	L
L	L	L	0

Tabelle 1

Durch logische Verknüpfungen sollen nun die aus Tabelle 1 abgeleiteten Ergebnismatrizen

Ü	0	L
0	0	0
L	0	L

und

S	0	L
0	0	L
L	L	0

verwirklicht werden.

Für den Übertrag "Ü" ist dies einfach. Er entspricht der Konjunktion. Als Ergebnismatrix dargestellt, ergibt sich:

Ü	0	L
0	0	0
L	0	L

Übertrag

ist gleich

$\wedge$	0	L
0	0	0
L	0	L

Konjunktion

Schwieriger ist die Summenbildung. Weder die Konjunktion noch die Disjunktion entsprechen der Ergebnismatrix "S".

Unter Verwendung der Beziehungen

$a \wedge \bar{a} = 0$ und
$a \vee \bar{a} = L$

ergibt sich

$\overline{a \wedge b}$	0	L
0	L	L
L	L	0

und

$a \vee b$	0	L
0	0	L
L	L	L

Die Verbindung von $a \vee b$ und $\overline{a \wedge b}$ führt zur Realisierung der Ergebnismatrix "S".
Überprüfen wir nochmals die Richtigkeit der Realisierung in bezug auf die Summe "S" der Tabelle 1 für jede Zeile.

1. Zeile

$a = 0; \quad b = 0$
$S = (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge b})$
$S = (0 \vee 0) \wedge (\overline{0 \wedge 0})$
$S = 0 \wedge \bar{0}$
$S = 0 \wedge L$
$S = 0$

2. Zeile

$a = 0; \quad b = L$
$S = (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge b})$
$S = (0 \vee L) \wedge (\overline{0 \wedge L})$
$S = L \wedge \bar{0}$
$S = L \wedge L$
$S = L$

3. Zeile

$a = L; \quad b = 0$
$S = (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge b})$
$S = (L \vee 0) \wedge (\overline{L \wedge 0})$
$S = L \wedge \bar{0}$
$S = L \wedge L$
$S = L$

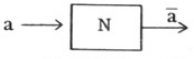
4. Zeile

$a = L; \quad b = L$
$S = (a \vee b) \wedge (\overline{a \wedge b})$
$S = (L \vee L) \wedge (\overline{L \wedge L})$
$S = L \wedge \bar{L}$
$S = L \wedge 0$
$S = 0$

Unter Verwendung der Symbole

Konjunktion

Disjunktion



Negation

erhält man die Schaltung für die Addition zweier einstelliger Dualzahlen ohne Berücksichtigung des Übertrages. Diese Schaltung nennt man Halbadder, da ein Übertrag in die nächstfolgende Stelle nicht realisiert wird.

Unter Berücksichtigung von Abbildung 8 kann die Tabelle 1 erweitert werden.

Wir können nunmehr unter Verwendung der Bauelemente 1 bis 4 die verschiedenen Möglichkeiten durchspielen. Betrachten wir die Zeile 3 näher, so

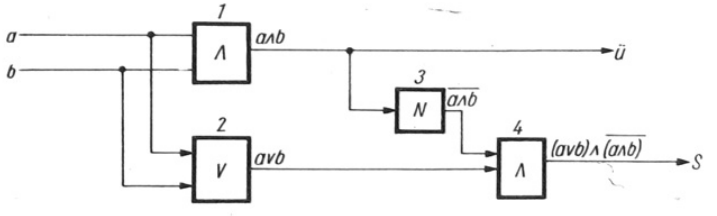


Abbildung 8
Halbadder

	a	b	1	2	3	4
Zeile 1	0	0	0	0	L	0
Zeile 2	0	L	0	L	L	L
Zeile 3	L	0	0	L	L	L
Zeile 4	L	L	L	L	0	0

Tabelle 2

ergibt sich, daß der Eingang a mit L und der Eingang b mit 0 belegt ist. Das Element 1 entspricht einer Konjunktion und liefert am Ausgang eine 0. Das Element 2 entspricht einer Disjunktion, am Ausgang entsteht demnach ein L. Der Eingang von Element 3 ist gleich dem Ausgang von Element 1, also 0. Das Element 3 ist ein Negator, also entsteht am Ausgang ein L. Die Eingänge des Elementes 4 entsprechen den Ausgängen der Elemente 2 und 3, also in beiden Fällen einem L. Der Ausgang des Elementes 4 ist ebenfalls ein L.

Auf die Probleme der Schaltungsvereinfachung und Schaltungsoptimierung, die wesentlich komplizierter sind, wurde nicht eingegangen.

Aufgabe der Schaltalgebra ist es, die für die jeweils verwendeten Schaltelemente günstigsten Schaltungen zu ermitteln. Dabei werden besondere Anforderungen gestellt, wie hohe Betriebssicherheit, hohe Operationsgeschwindigkeit des geschalteten Systems, möglichst minimale Anzahl von Schaltelementen.

Mit Hilfe der Schaltalgebra, auch Boolsche Algebra genannt, kann die Einzelschaltung und auch die Schaltung eines elektronischen Rechenautomaten aufgestellt, untersucht und optimiert werden.

Informationsspeicherung

1. Einleitung

2. Speicherelemente

2.1. Grundlegende Bemerkungen
2.2. Das Flip-Flop
2.3. Ferritkerne
2.4. Magnetbandspeicherung
2.5. Vergleichende Betrachtungen

3. Anwendungen des Flip-Flops

3.1. Die taktgesteuerte sequentielle Schaltung
3.2. Das Prinzip einer Additionsschaltung
3.3. Der Dualzähler
3.4. Die Schiebekette

1. Einleitung

Einrichtungen zur Speicherung von Informationen sind Bestandteil jeder modernen Datenverarbeitungsanlage. Sie dienen zur Aufbewahrung von Zahlenwerten, die für die Rechnung benötigt werden, von Zwischenergebnissen und Programmen. Die Speichereinrichtungen lassen sich gewissermaßen als das "Gedächtnis" dieser Anlagen interpretieren.

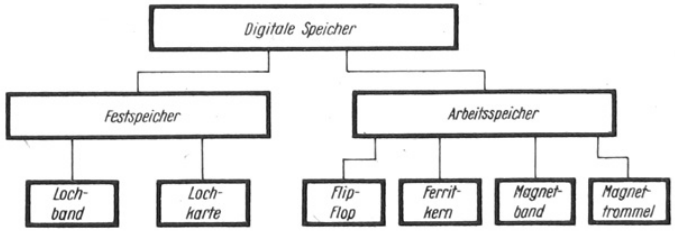


Abbildung 1
Übersicht über gebräuchliche digitale Speicher

LEKTION

6

Speicher digitaler Rechenanlagen bewahren die Informationen als Zeichenfolgen auf, im allgemeinen in dualer Darstellung. Entsprechend ihrer Verwendung unterscheidet man Festspeicher und Arbeitsspeicher.

Festspeicher sind nur für einmalige Informationsaufnahme eingerichtet, in Arbeitsspeichern können die Informationen nach Bedarf ausgewechselt werden.
In den folgenden Ausführungen beziehen wir uns nur auf Arbeitsspeicher.

2. Speicherelemente

2.1. Grundlegende Bemerkungen

An Speichereinrichtungen sind 3 grundlegende Forderungen zu stellen:

- Sie müssen Informationen aufnehmen können.
- Die Informationen müssen über lange Zeit aufbewahrt werden.
- Der Informationsinhalt eines Speicherelements muß sich auswechseln lassen.

Ein einfaches Speicherelement, das diese Forderungen erfüllt, ist der Lichtschalter. Der in einen Stromkreis eingefügte Schalter speichert durch seine Stellungen die Informationen "Licht eingeschaltet" und "Licht ausgeschaltet".

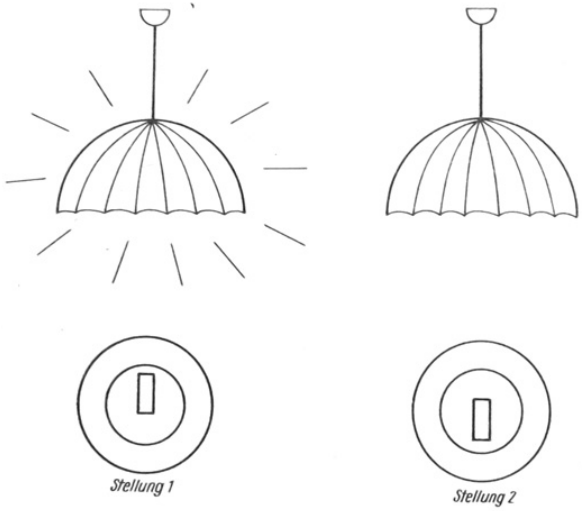


Abbildung 2
Schalter als Speicherelement

Die einmal eingestellten Zustände bleiben erhalten, solange der Schalter nicht betätigt wird. Erst durch zwangsweisen Eingriff kann er von einer Stellung in die andere gebracht werden.

Wir können daraus eine Definition ableiten:

Speicherelemente sind physikalische Objekte mit mindestens zwei stabilen Zuständen.

Schalter mit zwei stabilen Zuständen können zur Speicherung von Binärzeichen verwendet werden. Beispielsweise können wir der oberen Stellung eines Schalters das Binärzeichen L, der unteren das Binärzeichen 0 zuordnen.

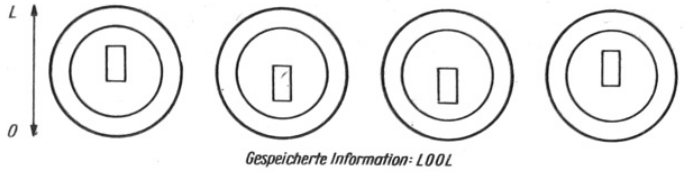


Abbildung 3
Speicherung von Binärinformationen mit Schaltern

Ein Schalter ist in der Lage, ein Binärzeichen zu speichern. Mit 4 Schaltern können wir die Dezimalziffern von 0 bis 9 darstellen. Bei Verwendung der Normalverschlüsselung (vgl. Lektion 4) speichert das in Abbildung 3 gezeigte Modell die Dezimalziffer 9. LLLL ist die größte Dualzahl, die dieses Modell aufnehmen kann; sie entspricht der Dezimalzahl 15.
Eine Stelle einer Dualzahl nennt man auch Bit. Dieses Wort ist durch Zusammenfassung der beiden englischen Wörter binary digit entstanden und bedeutet in der wörtlichen Übersetzung "Binärstelle".
Ein Speicherelement mit 2 stabilen Zuständen speichert also 1 Bit, n Speicherelemente speichern n Bit, sie können eine n-stellige Dualzahl aufnehmen.
Ein Schalter kann die Information nicht nur durch seine Stellung speichern, er kann darüber hinaus bestimmte Wirkungen ausüben. So kann er einen Stromkreis schließen oder öffnen, er kann eine Leitung von einem positiven Spannungspotential auf ein negatives umschalten.
Damit wäre ein Schalter in der Lage, die Eingänge von Verknüpfungsschaltungen zu beeinflussen.
In elektronischen Datenverarbeitungsanlagen muß man zusätzlich die Forderung stellen, daß die Verknüpfungsschaltung auch den Zustand des Speicherelements ändern kann, um zum Beispiel bestimmte Zwischenergebnisse einer Rechnung wieder in den Speicher einzutragen. Zwischen Speicherelement und Verknüpfungsschaltung muß also eine enge Wechselwirkung möglich sein, beide müssen sich gegenseitig beeinflussen können.

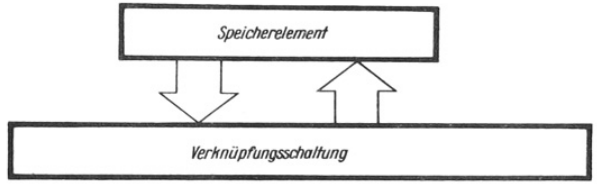


Abbildung 4
Kopplung zwischen Speicherelement und Verknüpfungsschaltung

Die zuletzt erwähnte Eigenschaft der Umschaltung durch die Ausgangsspannungen von Verknüpfungsschaltungen besitzen mechanische Schalter nicht.

2.2. Das Flip-Flop

Das Flip-Flop ist eine bistabile elektronische Speicherschaltung.
Das Flip-Flop besteht im wesentlichen aus 2 über Kreuz zusammengeschalteten Negatoren. Die links und rechts im Schaltbild gezeichneten Leitungen übernehmen eine Doppelfunktion als Ein- und Ausgang.

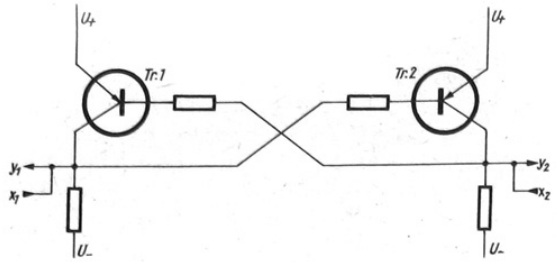


Abbildung 5
Prinzipschaltbild eines Transistor-Flip-Flops

Wirkungsweise der Schaltung:
Gelangt an den Eingang x_1 ein positiver Impuls, so wird der rechte Transistor (Tr. 2) gesperrt. Die Speisespannung U_ wird bei y_2 wirksam, so daß dieser Ausgang negativ ist.
Diese negative Spannung wirkt gleichzeitig auf den Eingang x_2 und gelangt an die Basis von Tr. 1. Tr. 1 wird dadurch leitend und erhält durch U_+ den bereits am Ausgang y_1 vorhandenen positiven Zustand.
Weitere positive Impulse, die an den Eingang x_1 gelangen, ändern den elektrischen Zustand der Schaltung nicht. Das Flip-Flop ist in dieser Stellung stabil.
Ein negativer Impuls bei x_1 macht Tr. 2 leitend und y_2 wird positiv. (Man kann die gleiche Wirkung erzielen, wenn von vornherein ein positiver Impuls bei x_2 angelegt wird.) Dieser positive Impuls wirkt auf Tr. 1 zurück, sperrt diesen und erhält bei y_1 den negativen Zustand. Das ist die zweite stabile Stellung des Flip-Flops.
Durch entsprechende Impulse kann das Flip-Flop von einem stabilen Zustand in den anderen überführt werden. Ordnet man den beiden Zuständen die Binärzeichen 0 und L zu, so kann ein Flip-Flop eine Binärstelle aufnehmen, also 1 Bit speichern. In dem genormten Symbol trennt man der Übersichtlichkeit wegen die Ein- und Ausgänge.

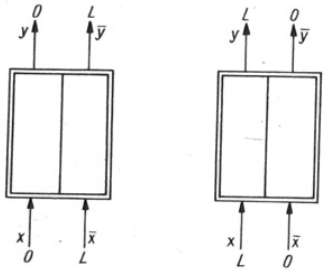


Abbildung 6
Die stabilen Zustände eines Flip-Flops

Der eine Ausgang (Eingang) führt immer die Negation des anderen. Wir bezeichnen sie mit y und $\bar{y}$ (x und $\bar{x}$).
Ursachen und Wirkungen der Umschaltungen des Flip-Flops sind Spannungen. Damit eignet sich dieses Speicherelement hervorragend für eine enge Kopplung mit Verknüpfungsschaltungen. Die Ausgänge der Verknüpfungsschaltungen können die Eingänge der Speicherschaltung beeinflussen, während deren Ausgänge wiederum auf die Eingänge von Verknüpfungsschaltungen wirken.

2.3. Ferritkerne

LEKTION 6

Ferritkerne sind in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen sehr häufig verwendete Speicherelemente. Die aus ferromagnetischem Material gepreßten Ringkerne haben einen rechteckigen Querschnitt. Das für die Kerne verwendete Material muß eine hohe Remanenz (Restmagnetismus) aufweisen.
Der Ferritkern ist ein bistabiles Speicherelement und in gewisser Weise mit dem Flip-Flop vergleichbar. Er kann durch einen Stromstoß umgeschaltet werden. Dabei geht er aus einem stabilen Zustand in den anderen über.
Die Schaltzustände werden durch zwei stabile Magnetisierungsrichtungen ausgedrückt.

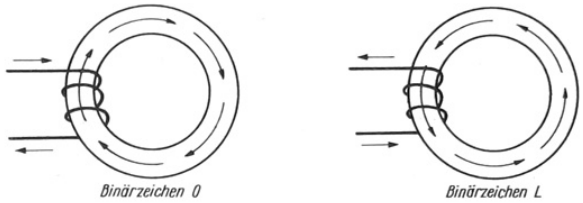


Abbildung 7
Speicherung von Binärinformationen im Ferritkern

Den beiden Zuständen können die Binärzeichen 0 und L zugeordnet werden. Ein Ferritkern eignet sich dadurch zur Speicherung binärer Informationen. Jeder Kern bildet eine 1-Bit-Speicherzelle.
Viele Ferritkerne sind bei Datenspeichern in einer Matrix zusammengefaßt, wobei durch jeden Kern mehrere Drähte gefädelt sind. Die Leitungen dienen zum Schreiben und Lesen der eingespeicherten Zustände.

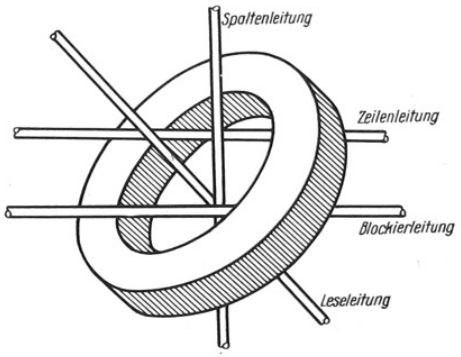


Abbildung 8
Aufbau eines Ferritkern-Speicherelements

2.4. Magnetbandspeicherung

Ähnlich der Informationsspeicherung in Ferritkernen wird hier der Effekt einer magnetisierbaren Schicht ausgenutzt. Zum Speichern des Binärzeichens L ändert man die Magnetisierungsrichtung, für das Binärzeichen 0 bleibt der jeweils letzte Zustand erhalten.

Auf den Magnetbändern der Datenverarbeitungsanlage Robotron 300 werden neben der Taktspur 7 andere Spuren gleichzeitig aufgezeichnet. Die zu

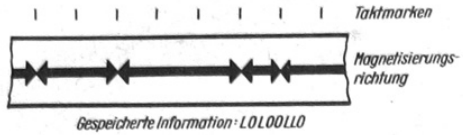


Abbildung 9
Informationsspeicherung
auf Magnetband

jeder Taktmarke gehörenden 7 Binärinformationen bilden jeweils ein Zeichen. Sie stehen auf dem Band senkrecht zur Transportrichtung.

2.5. Vergleichende Betrachtungen

Im Gegensatz zur aufwendigen Flip-Flop-Schaltung erscheinen der Ferritkern und das magnetisierte Fleckchen auf einer Magnetbandschicht sehr billig. Allerdings erfordern die beiden letztgenannten Speicherelemente einen wesentlich höheren Aufwand zum Schreiben und Lesen der Informationen. Ferritkern und Magnetband werden deshalb vor allem für die Speicherung größerer Informationsmengen verwendet, wobei der Aufwand zum Schreiben und Lesen für sehr viele Speicherelemente gemeinsam genutzt wird.
Der Hauptspeicher der Datenverarbeitungsanlage Robotron 300 besteht aus 320 000 Ferritkernen. Er ist in der Lage, 40 000 Zeichen (Ziffern, Buchstaben, Sonderzeichen) aufzunehmen.
Die Speicherkapazität eines 750 m langen Magnetbandes liegt bei etwa 10 Millionen Zeichen.
In späteren Lektionen wird die Arbeitsweise der Kernspeicher und der Bandspeicher gesondert besprochen. Wir wollen in den folgenden Ausführungen die Einsatzmöglichkeiten des Flip-Flops eingehender untersuchen.

3. Anwendungen des Flip-Flops

3.1. Die taktgesteuerte sequentielle Schaltung

Wir wollen von der Aufgabe ausgehen, eine Schaltung für die Addition mehrerer Dualzahlen x_1, x_2, x_3, x_4, ... zu entwickeln. Nach Lektion 5 "Informationsverknüpfung" könnte dazu eine Schaltung mit entsprechend vielen Eingängen benutzt werden.
Solche Verknüpfungsschaltungen sind mit großem Aufwand verbunden.
Die Addition läßt sich schaltungstechnisch wesentlich einfacher verwirklichen, wenn man sie als Folge (Sequenz) von Einzeloperationen ausführt.

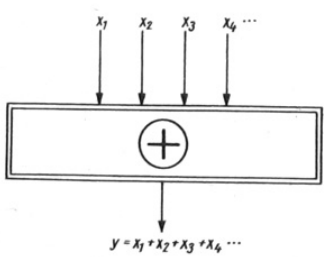


Abbildung 10
Additionsschaltung ohne
Zwischenspeicherung

$y = x_1 + x_2$ 1. Schritt
$z_1 + x_3$ 2. Schritt
$z_2 + x_4$ 3. Schritt
$z_3 + \ldots$ ...

Bei jedem Schritt tritt ein Zwischenergebnis (z) auf. Wenn es gelingt, das Zwischenergebnis vor der nächsten Addition wieder an die Eingänge der Verknüpfungsschaltung zurückzuführen, kommt man mit einer Schaltung aus, die nur 2 Eingänge besitzt: einen Eingang für das Zwischenergebnis des vorhergehenden Schrittes, einen Eingang für den folgenden Summanden.

Im 1. Schritt entsteht das Zwischenergebnis z_1. Es darf aber erst im 2. Schritt wieder an die Eingänge der Verknüpfungsschaltung gelangen, um mit x_3 zum nächsten Zwischenergebnis z_2 verknüpft zu werden. Die Summe von z_2 und x_4 wird dann im 3. Schritt gebildet usw. Eine Schaltung zur sequentiellen Verknüpfung der Operanden x_1, x_2, x_3, x_4, ... benötigt also die Fähigkeit, eine Zahleninformation zeitweise zu speichern. Zu einem festgelegten Zeitpunkt muß die Information an die Eingänge der Verknüpfungsschaltung abgegeben werden.
Schematisch besteht die Schaltung aus einer Verknüpfungsschaltung und Speicherelementen.

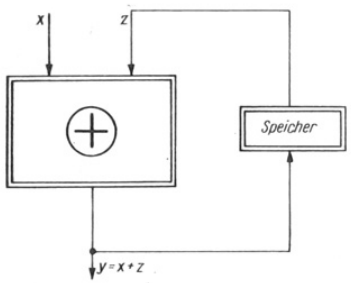


Abbildung 11
Additionsschaltung mit
Zwischenspeicherung

Speicherelemente dieser Art werden als Register bezeichnet.

Register sind im allgemeinen aus Flip-Flops aufgebaute Arbeitsspeicher zur kurzfristigen Speicherung von Informationen.

Sie sind zur Aufnahme eines Datenwortes eingerichtet, das heißt einer Zahl oder eines Befehls.
Man unterscheidet je nach Aufgabenstellung innerhalb einer Datenverarbeitungsanlage verschiedene Register.

Operandenregister
: Register zur Bereitstellung und Verarbeitung der Operanden

Resultatregister
: Register zur Aufnahme des Ergebnisses einer Operation (auch Akkumulator genannt)

Befehlsregister
: Register zur Aufnahme eines Befehlwortes

Befehlsaufrufregister
: Register zur Abberufung des nächsten Befehls

LEKTION 6

Durch zusätzliche schaltungstechnische Maßnahmen muß erreicht werden, daß die Operanden und die gespeicherten Zwischenergebnisse in genau festgelegten Schritten an die Eingänge der Verknüpfungsschaltung und der Speicherelemente gelangen.
Dazu dient ein Impulsgeber. Er erzeugt die Taktfrequenz der elektronischen Datenverarbeitungsanlage, bestimmt die zeitliche Folge der nacheinander ablaufenden Schritte. Im Rhythmus dieser Taktfrequenz arbeiten alle Teile einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage zusammen.
Bei der Anlage Robotron 300 sind es 100 000 Takte in jeder Sekunde, das heißt, die Zeitdifferenz zwischen zwei Taktimpulsen beträgt 10 μs (1 μs (Mikrosekunde) = 0,000001 s).
Für das taktweise Arbeiten sorgen Register in Verbindung mit Torschaltungen (Gates). Es sind spezielle UND-Schaltungen (vgl. Lektion 5), deren einer Eingang seine Impulse vom Taktgeber bezieht.

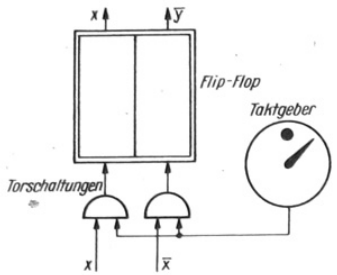


Abbildung 12
Aufbau eines 1-Bit-Registers zur taktgesteuerten Speicherung

Wir wollen uns die Wirkungsweise der Torschaltungen gesondert klarmachen. Eine UND-Schaltung führt nur dann am Ausgang positive Spannung (L), wenn ihre beiden Eingänge gleichzeitig positiv sind. In allen anderen Fällen ist der Ausgang negativ (0). Der Taktgeber liefert in regelmäßigen Abständen kurze positive Impulse. Durch die UND-Schaltung werden beide Eingangsspannungen zu einer neuen Ausgangsimpulsfolge verknüpft.

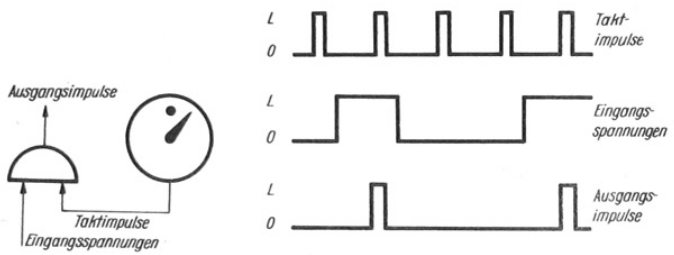
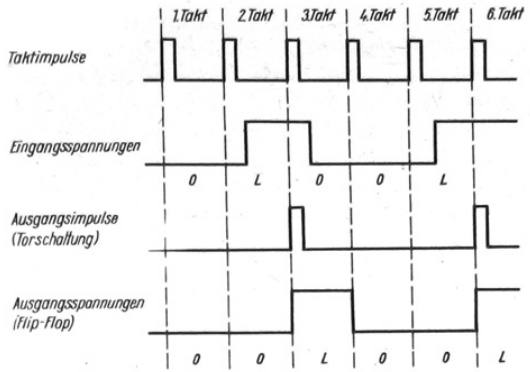


Abbildung 13
Arbeitsprinzip einer Torschaltung

Die Ausgangsimpulse der Torschaltung dienen als Schaltspannung für das Flip-Flop (vgl. Abb. 12). Ein positiver Impuls am Eingang x stellt das Flip-Flop in den einen stabilen Zustand. Weitere positive Impulse an x ändern seinen Zustand nicht.
Ein positiver Impuls an $\bar{x}$ (gleichbedeutend mit einem negativen Impuls an x) schaltet das Flip-Flop in den anderen stabilen Zustand um.
Die zeitliche Abhängigkeit von Eingangsspannung x am Tor und Ausgangsspannung y am Flip-Flop zeigt Abbildung 14.



LEKTION 6

Abbildung 14
Verzögerung der Informationsfolge durch ein Register

Ein Register (Torschaltung mit Flip-Flop) verzögert die Informationen um einen Takt. Eine Information, die am Eingang x des Registers liegt, ist beim nächsten Takt am Ausgang y zu finden.

3.2. Das Prinzip einer Additionsschaltung

Die sequentielle Schaltung zur Addition von Dualzahlen wollen wir nun etwas näher beschreiben.
Wir beschränken uns auf den Zahlenbereich, der sich mit 4 Binärzeichen darstellen läßt. Das sind die Dezimalzahlen 0 bis 15, die dual bei Normalverschlüsselung folgende Form haben:

0 - 0 0 0 0	4 - 0 L 0 0	8 - L 0 0 0	12 - L L 0 0
1 - 0 0 0 L	5 - 0 L 0 L	9 - L 0 0 L	13 - L L 0 L
2 - 0 0 L 0	6 - 0 L L 0	10 - L 0 L 0	14 - L L L 0
3 - 0 0 L L	7 - 0 L L L	11 - L 0 L L	15 - L L L L

Für den Transport der codierten Zahlen sind 4 Leitungen nötig, die Register 1 und 2 müssen je 4 Flip-Flops zur Zwischenspeicherung der Zahlen enthalten. Register 1 dient hier als Operandenregister, Register 2 als Resultatregister.
Untersuchen wir nun die Wirkungsweise der Schaltung am Beispiel der Aufgabe 6 + 2 + 5. Register 2 soll zu Beginn der Rechnung die Null (0000) enthalten.

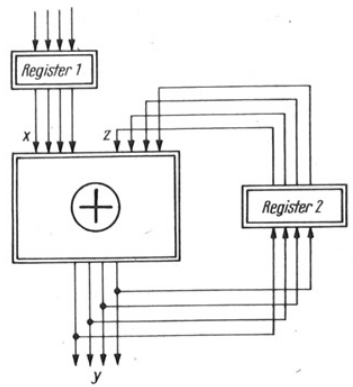


Abbildung 15
Sequentielle Additionsschaltung bei dezimal-dualer Verschlüsselung

1. Takt Die Zahl 6 (0LL0) gelangt an den Eingang x. Zur gleichen Zeit steht am Eingang z der Additionsschaltung die Zahl 0 (0000).
Die Zwischensumme 6 + 0 = 6 (0LL0) gelangt an den Ausgang y und gleichzeitig an den Eingang von Register 2.

2. Takt Mit dem Taktimpuls werden die Tore der beiden Register gleichzeitig geöffnet. R_1 nimmt den nächsten Summanden 2 (00L0) auf, R_2 die Zwischensumme 6. Die Summierung stellt am Ausgang y bzw. am Eingang von R_2 die nächste Zwischensumme 8 (L000) zur Verfügung.

3. Takt 5 (0L0L) kommt in R_1, 8 in R_2. Die Summierung ergibt 13 (LL0L).

4. Takt Da keine weiteren Summanden vorhanden sind, läuft in R_1 eine 0 (0000) und wird mit 13 zum Endresultat 13 verknüpft.
Die Endsumme steht am Ausgang y zur weiteren Verwendung zur Verfügung.

Die hier am speziellen Beispiel beschriebene sequentielle Arbeitsweise ist typisch für elektronische Datenverarbeitungsanlagen. Innerhalb der Schaltung gespeicherte Informationen werden mit anderen verknüpft, die von außen zufließen. Die Ergebnisse dieser Verknüpfungsoperationen werden zum Teil gespeichert, zum Teil werden sie nach außen übermittelt.
Das Verhalten an den Ausgängen sequentieller Schaltungen wird nicht nur durch den momentanen Zustand an den Eingängen, sondern auch durch die zurückliegende Folge von Eingangszuständen bestimmt.
Sequentielle Schaltungen bezeichnet man auch als Schaltwerke. Speicherung und zeitabhängige Arbeitsweise sind ihre besonderen Merkmale.

3.3. Der Dualzähler

Eine besondere Variante der besprochenen Schaltung ist der Dualzähler. Er hat die Eigenschaft, die am Ausgang y erscheinende Zahl bei jedem Takt um 1 zu erhöhen.
Der Eingang x führt ständig die Zahl 1 (000L). Da man sie durch eine konstante Spannung darstellen kann, entfällt dieser Eingang.

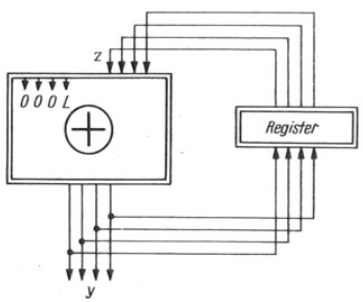


Abbildung 16
Dualzähler

Die Zählung beginnt mit 1 (000L). Sie wird im Register zwischengespeichert und im nächsten Takt mit der konstant anliegenden 1 zur Summe 2 (00L0) verknüpft usw.
Da uns im Register nur 4 Flip-Flops zur Verfügung stehen, ist die größte zu speichernde Zahl 15 (LLLL). Bei der nächsten Addition 15 + 1 = 16 (L0000) entsteht eine 5-stellige Dualzahl, die nicht mehr gespeichert werden kann. Die größte Stelle (das links stehende L) wird von der Schaltung

vernachlässigt, das Register nimmt nur die Binärzeichenkombination 0000 auf. Damit kann der Zählvorgang wieder bei 1 beginnen.
Solche Zählschaltungen, die bei jedem Takt eine Summe um einen konstanten Wert erhöhen, haben in Datenverarbeitungsanlagen spezielle Aufgaben zu übernehmen.

3.4. Die Schiebekette

In Verbindung mit den Torschaltungen verzögert jedes Flip-Flop eine Information um einen Takt. Diese Schaltungen kann man in beliebiger Zahl hintereinanderhängen.

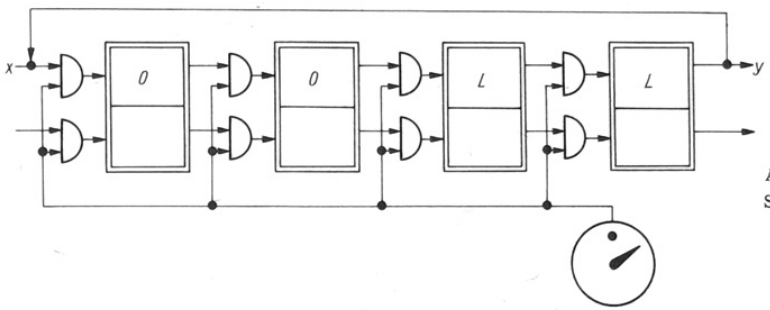


Abbildung 17
Schiebekette

Geben wir eine Folge von Binärzeichen ein, etwa L, L, 0, 0, so erreicht das 1. Zeichen den Ausgang nach 4 Takten. Man nennt diese Schaltung "Schiebekette" oder Schieberegister. Die Information wird hier "hindurchgeschoben". n Glieder verzögern n Takte.
Wird der Ausgang einer Schiebekette wieder an den Eingang angeschlossen, so läuft die Information aus dem letzten Flip-Flop in das erste zurück. Nach jeweils 4 Takten ist der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt.

Ausgangsstellung	0 0 L L
1. Takt	L 0 0 L
2. Takt	L L 0 0
3. Takt	0 L L 0
4. Takt	0 0 L L

Wir haben es hier mit der dynamischen Speicherung zu tun.
Einer Binärstelle einer Dualzahl ist nicht immer das gleiche Speicherelement zugeordnet.
Die Schiebekette liefert 2 Varianten der Darstellung von Dualzahlen, wie sie in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen vorkommen.

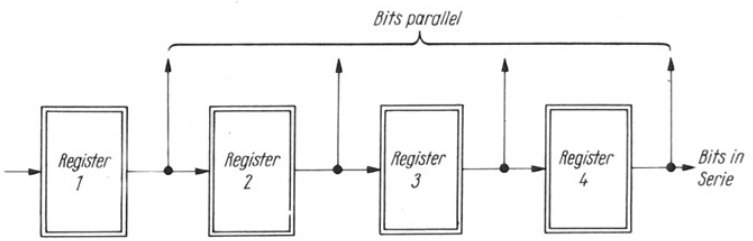


Abb. 18
Parallel- und Seriendarstellung in einer Schiebekette

LEKTION

6

Die 4 Bits in den 4 Registern kann man über 4 Leitungen gleichzeitig abgreifen. Man nennt diese Art Paralleldarstellung. Hierbei erfolgt die Übertragung gleichzeitig auf mehreren Leitungen.
Im Gegensatz dazu erscheinen die 4 Bits nacheinander am Ausgang der Schiebekette. Die Stelle mit dem kleinsten Stellenwert kommt zuerst. Zur Übertragung genügt eine Leitung. Hier haben wir es mit der Serien-darstellung zu tun.
Aus der Entscheidung für die eine oder andere Darstellungsart ergeben sich Konsequenzen für den Aufbau und die Arbeitsweise einer Datenverarbeitungsanlage.
In der Schiebekette haben wir eine Möglichkeit gefunden, von der Serien- zur Paralleldarstellung überzugehen und umgekehrt.

LEKTION

7

Arithmetische Operationen

1. Einleitung

2. Zahlendarstellung

2.1. Wortlänge
2.1.1. Feste Wortlänge
2.1.2. Variable Wortlänge
2.2. Kommadarstellung
2.2.1. Festkommadarstellung
2.2.2. Gleitkommadarstellung
2.3. Vorzeichendarstellung
2.4. Komplementdarstellung

3. Grundrechenoperationen

3.1. Addition
3.2. Multiplikation

4. Addition und Multiplikation im Dualsystem

1. Einleitung

Die Informationsverarbeitung in elektronischen Datenverarbeitungsanlagen bildet in ihrer Gesamtheit ein komplexes und kompliziertes System logischer Prozesse. Das arithmetische Rechnen ist nur ein Teilbereich. Diesem speziellen Komplex der Datenverarbeitung ist unsere Lektion gewidmet. Aus der Vielzahl der in einer Datenverarbeitungsanlage darstellbaren Zeichen wollen wir uns auf die numerischen Informationen beschränken, das heißt auf Daten, die Ziffern, Zahlen und Vorzeichen repräsentieren.

In den folgenden Ausführungen wird ein Überblick über die möglichen Methoden der Darstellung und Verarbeitung numerischer Informationen in digital arbeitenden Anlagen gegeben.

LEKTION 7

2. Zahlendarstellung

Zwei Möglichkeiten der Darstellung von Zahlen sind in den vorangegangenen Lektionen besprochen worden.

Rein-duale Darstellung:
Eine Dezimalzahl ist als Ganzes in eine Dualzahl verwandelt.
(Beispiel: 89 - L0LL00L)

Dezimal-duale Darstellung:
Jede Ziffer einer Dezimalzahl wird einzeln durch eine Dualtetrade ersetzt.
(Beispiel: 89 - L000 L00L)

Wenn nicht ausdrücklich anders betont, beziehen wir uns im folgenden nur auf die dezimal-duale Zahlendarstellung.

2.1. Wortlänge

Abhängig von der Konstruktion des Rechenwerkes einer Anlage, unterscheidet man die Zahlendarstellung in fester Wortlänge und in variabler Wortlänge.

2.1.1. Feste Wortlänge

Jede Zahl wird als Datenfolge mit fester Länge dargestellt. Üblich sind 10 bis 12 Dezimalstellen, bei Verschlüsselung durch Dualtetraden also 40 bis 48 Bit.

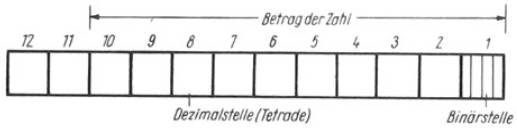


Abbildung 1
Datenwort bei fester Wortlänge (12 Stellen)

Die Abbildung zeigt ein Datenwort, bei dem 10 von 12 Tetraden für die Darstellung des Zahlenbetrages genutzt werden.
Hat eine Zahl weniger als 10 Dezimalstellen, muß bis zur Wortlänge mit Nullen aufgefüllt werden. Zahlen mit mehr als 10 Dezimalstellen sind durch Rundung entsprechend zu verkürzen.

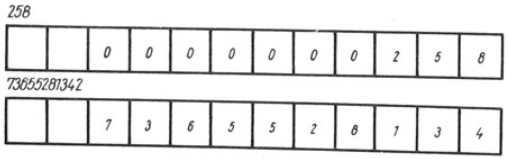


Abbildung 2
Zahlen bei fester Wortlänge (12 Stellen)

2.1.2. Variable Wortlänge

Das Datenwort wird durch eine zusätzliche Information (Wortmarke) in seiner Länge begrenzt. Dadurch ist es nicht nötig, die Worte auf eine konstante Stellenzahl zu bringen. Im Rechenwerk wird das Ende der Ziffernfolge, die eine Zahl bildet, automatisch erkannt. Die folgende Abbildung zeigt eine durch Wortmarken (WM) getrennte Folge von Zahlen (zum Beispiel auf einem Magnetband).

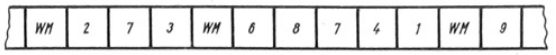


Abbildung 3
Zahlenfolge bei variabler Wortlänge

Auch Worte mit variabler Länge sind auf Grund der Auslegung bestimmter speichernder Anlagenteile in der Stellenzahl nach oben begrenzt. Man nimmt als obere Grenze im allgemeinen 80 bis 120 Stellen an.
Neben der Wortlänge gehören zur kompletten Zahlendarstellung noch Informationen über

das Komma,
den absoluten Betrag einer Zahl,
das Vorzeichen.

2.2. Kommadarstellung

2.2.1. Festkommadarstellung

Zahlen in Festkommadarstellung enthalten das Komma immer an der gleichen Stelle. Man kann es vor die höchste oder hinter die kleinste Stelle einer Zahl setzen. Im letzten Fall arbeitet die Anlage dann nur mit ganzen Zahlen. Das im Rechenwerk für alle Zahlen festgelegte Komma heißt Maschinenkomma.

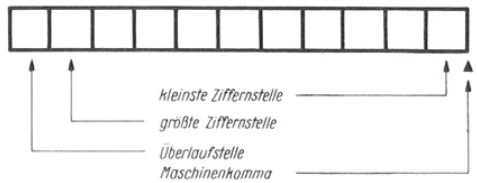


Abbildung 4
Festkommazahl (Maschinenkomma hinter der Einerstelle)

Die Arbeit mit Festkommazahlen erfordert einen hohen Aufwand bei der Programmierung. Der Programmierer muß vor der Abarbeitung in der Anlage den gesamten Rechenvorgang wertmäßig überblicken und dafür Sorge tragen, daß alle Rechengrößen vor und nach jeder Operation im Darstellungsbereich der Maschine liegen bzw. dorthin transformiert werden. Dazu werden für die Ausgangswerte einer Rechnung bestimmte Einschränkungen gemacht und die Operanden mit Skalarfaktoren multipliziert. Diese Faktoren gelangen aber nicht mit in die Anlage.
Machen wir uns den Vorgang an einem Zahlenbeispiel klar. Zur besseren Übersicht ist die Zahlenlänge auf 6 Stellen beschränkt.

Operanden	8457,63
	6572,3
Vorbereitung	$084576 \cdot 10^1$
	$065723 \cdot 10^1$
Darstellung in der Anlage	084576
	065723
Ergebnis der Addition	150299

Bei der Vorbereitung wurde zunächst die stellenwertrichtige Darstellung berücksichtigt. Um einem möglichen Überlauf (Überschreitung des vorgesehenen Zahlenbereichs) zu begegnen, mußte der 1. Operand in seiner niedrigsten Stelle gerundet werden. Die Beachtung des Überlaufs führt oft zu

Verlust an Genauigkeit. Sollte während der Rechnung trotzdem einmal der Zahlenbereich überschritten werden, so stoppt die Anlage automatisch den Rechengang und zeigt den Überlauf an.

2.2.2. Gleitkommadarstellung

Die Gleitkommadarstellung beruht auf der halblogarithmischen Schreibweise einer Zahl.

$$a = \pm m \cdot B^{\pm e}$$

Darin ist a die dargestellte Zahl, m die Mantisse, B die Basis des verwendeten Zahlensystems (im allgemeinen 10) und e der Exponent.

Beispiele für halblogarithmische Zahlendarstellungen

$$\begin{aligned} 6{,}75186 &= 0{,}675186 \cdot 10^{+1} \\ &= 675{,}186 \cdot 10^{-2} \\ &= 675186 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Mantisse — Basis mit Exponent

$$\begin{aligned} -0{,}0004289 &= -0{,}4289 \cdot 10^{-3} \\ &= -4{,}289 \cdot 10^{-4} \\ &= -4289 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Je nach Wahl des Exponenten kann eine Zahl in verschiedener Weise halblogarithmisch geschrieben werden. Um hier zu einer Einheitlichkeit zu kommen, vereinbart man, daß bei der Mantisse die erste Stelle nach dem Komma auch die erste von Null verschiedene Zahl tragen soll.
Aus den Beispielen müssen wir dann folgende Zerlegung auswählen:

$$\begin{aligned} 6{,}75186 &= 0{,}675186 \cdot 10^{+1} \\ -0{,}0004289 &= -0{,}4289 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Man spricht hier von einer normierten Darstellung.
Alle Gleitkommazahlen, die in eine Datenverarbeitungsanlage eingegeben werden, müssen auf diese normierte Form gebracht werden. Während des Rechenvorgangs übernimmt das Rechenwerk die Normierung automatisch.

In der normierten Darstellung kommen 2 Angaben bei allen Zahlen vor: die Null vor dem Komma der Mantisse und die 10 als Basis. Da sie sich nie ändern, sind sie für den Rechenprozeß uninteressant. Damit für diese konstanten Angaben kein gerätetechnischer Aufwand nötig ist, werden sie weggelassen.

$$\begin{aligned} 6{,}75186 &= +675186 + 1 \\ -0{,}0004289 &= -4289 \quad -3 \end{aligned}$$

Im allgemeinen werden in den Datenworten, gleich ob feste oder variable Wortlänge, 2 Stellen für den Exponenten vorgesehen. Bei der elektronischen Datenverarbeitungsanlage Robotron 300 sind es die beiden rechten Stellen. Durch den so festgelegten Exponentenbereich von –99 bis +99 können in Gleitkommadarstellung sehr große und sehr kleine Zahlen geschrieben werden, ohne daß sich die Zahlenlänge dabei ändern muß.
Der Programmierungsaufwand für Gleitkommarechnungen ist wesentlich geringer als bei Festkommarechnungen. Allerdings muß man durch die zusätzlichen Exponentenrechnungen eine Verringerung der Rechengeschwindigkeit in Kauf nehmen.

Festkomma- und Gleitkommadarstellung haben ihre speziellen Einsatzgebiete. Additions- und Subtraktionsaufgaben mit annähernd gleichem Zahlenbereich lassen sich am schnellsten mit festem Komma durchführen. Bei der Multiplikation und Division überwiegen die Vorteile der Gleitkommarechnung. Moderne Datenverarbeitungsanlagen können daher in beiden Formen arbeiten.

2.3. Vorzeichendarstellung

Wir wollen noch einmal auf die Gleitkommabeispiele zurückgreifen:

$$\begin{aligned} &+675186 + 1 \\ &-\ 4289 - 3 \end{aligned}$$

Hier sind im Datenwort Zeichen enthalten, die keine Zahlen, aber doch untrennbar mit der numerischen Information verbunden sind: die Vorzeichen.

Die im normalen Rechnen übliche Unterscheidung zwischen positiven und negativen Zahlen erfolgt durch die Angabe ihres absoluten Betrages und eines Vorzeichens:

$$\begin{aligned} &- \quad 4289 \\ &\text{Vorzeichen} \quad \text{Betrag} \end{aligned}$$

Für die elektronische Datenverarbeitung muß das Vorzeichen ebenfalls als Binärzeichenkombination verschlüsselt werden. Da nur eine Entscheidung zwischen 2 Vorzeichen nötig ist, genügt eine Binärstelle. Aus Zweckmäßigkeitsgründen verabredet man

$$\begin{aligned} + &\ \hat{=}\ 0 \\ - &\ \hat{=}\ L \end{aligned}$$

Dem Vorzeichen wird eine feste Stelle eingeräumt. Sie kann zum Beispiel vor der höchsten Stelle des Betrages liegen. Die Zahl -0,0004289 in Gleitkommadarstellung mit 2 Exponentenstellen hat dann folgendes Aussehen:

L	4	2	8	9	L	0	3

Abbildung 5
Gleitkommazahl
$-0{,}4289 \cdot 10^{-3}$

2.4. Komplementdarstellung

Wesentlich häufiger als die Vorzeichen-Betrag-Darstellung findet man in modernen Datenverarbeitungsanlagen beim eigentlichen Rechenvorgang die Komplementdarstellung.
Veranschaulichen wir uns die Entstehung des Komplements an einer Subtraktionsaufgabe.

$$\begin{aligned} &2566 \quad \text{(Minuend)} \\ &\underline{-1473} \quad \text{(Subtrahend)} \\ &1093 \quad \text{(Differenz)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis erhält man durch stellenweise Subtraktion, beginnend von rechts.
Die Differenz 1093 ist positiv, da der Minuend größer als der Subtrahend ist.
Beim Vertauschen beider Operanden können wir formal ebenso vorgehen. Wir wollen aber – analog zur Arbeit in Rechenwerken – die Zahlen um eine Stelle nach links erweitern.

```
  01473
- 02566
  98907
```

13 – 6 = 7, Übertrag in die nächste Stelle. 7 – 7 = 0. 14 – 5 = 9, Übertrag in die nächste Stelle. 11 – 3 = 8, Übertrag in die nächste Stelle. 10 – 1 = 9, ...

Das Ergebnis entspricht in dieser Form nicht der wirklichen Differenz. Die 9 in der hinzugefügten linken Stelle entsteht nur dann, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend, wenn die Differenz negativ ist.

Eine 9 in dieser Stelle ist ein verschlüsseltes Minuszeichen. Die restlichen 4 Stellen enthalten den Betrag der negativen Zahl als Komplement.

Der Betrag ergibt sich als diejenige Zahl, um die bei der Subtraktion der Wert 0 unterschritten wurde. Formal kann er durch Ergänzung des Komplements zu 0 gebildet werden.

```
  00000
- 98907
   1093
```

-1093, eine Zahl mit Vorzeichen und Betrag, entspricht der Komplementdarstellung 98907.
Zu einer eingehenderen Betrachtung der Komplementdarstellung kommen wir in der Lektion über die Arbeitsweise des Rechenwerkes. Abschließend sei erwähnt, daß bei Verwendung der Komplementdarstellung die Subtraktion als Addition ausgeführt werden kann.

3. Grundrechenoperationen

Die Rechenoperationen lassen sich entsprechend den uns bekannten Codierungsmöglichkeiten in reiner Dualdarstellung bzw. in dezimal-dualer Verschlüsselung durchführen (vgl. 2. Zahlendarstellung). Die dazugehörenden Schaltungen unterscheiden sich dann in der Zahl der benötigten Ein- und Ausgänge und dem damit zusammenhängenden inneren Aufbau, nicht aber in ihrer prinzipiellen Arbeitsweise.
Wir konzentrieren uns im wesentlichen auf die dezimal-duale Zahlenverschlüsselung, weil hier viele Parallelen zu dem uns geläufigen Rechnen zu finden sind.

3.1. Addition

Die Bearbeitung einer Additionsaufgabe im Rechenwerk einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage und die schriftliche Addition haben viele Gemeinsamkeiten.
Die stellenweise Addition ist verbunden mit der Berücksichtigung eines möglichen Übertrages in der nächsthöheren Stelle.

```
  2566
+1473
 (0110)  Übertrag
  4039   Summe
```

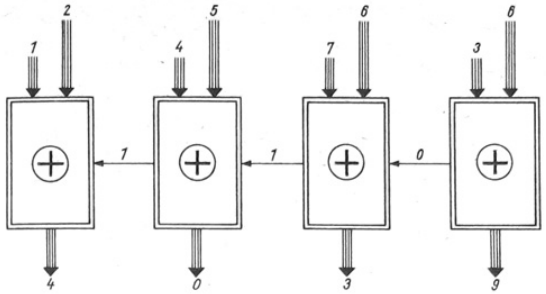



Abbildung 6
Verknüpfungsschaltung zur Addition von Dezimalzahlen

Diesem Vorgehen kann man eine reine Verknüpfungsschaltung zuordnen.
Man benötigt vier Teilschaltungen, von denen jede wegen der Tetradendarstellung zweimal vier Eingänge für die beiden zu addierenden Ziffern und vier Ausgänge für die Dezimalstelle des Resultats hat. Außerdem braucht sie noch einen zweiwertigen Ausgang, an dem ein eventueller Übertrag abgelesen werden kann, und einen zweiwertigen Eingang, um diesen Übertrag in der nächsthöheren Stelle hinzuzufügen.
Die Anzahl der benötigten Teilschaltungen richtet sich nach der Länge der zu addierenden Zahlen. Soll das Rechenwerk für eine Wortlänge von 10 Stellen ausgebaut werden, braucht man also 10 Teilschaltungen.
Es liegt nahe, statt mehrerer gleichartiger Teilschaltungen nur eine zu verwenden, und die einzelnen Stellen nacheinander abzuarbeiten. Dieser Weg wäre für das Arbeiten mit variabler Wortlänge von besonderem Interesse.

Zur Addition zweier mehrstelliger Dezimalzahlen ist eine sequentielle Schaltung notwendig, die über zweimal vier Eingänge und vier Ausgänge verfügt. Ein Speicherelement, das sogenannte Übertrags-Flip-Flop, dient zur Aufbewahrung des Übertrags. Die Schaltung hat dafür je einen zusätzlichen Aus- und Eingang.

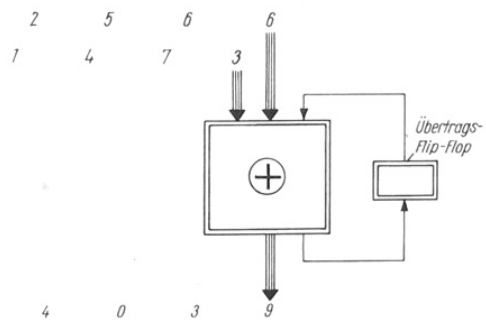


Abbildung 7
Sequentielle Schaltung zur Addition von Dezimalzahlen

Zu Beginn ist kein Übertrag vorhanden, im Flip-Flop ist also eine 0 gespeichert.
Es wird 6 + 3 = 9 gebildet, ohne daß ein Übertrag entsteht. Nach Ausführung dieser Operation werden die Stellen mit dem nächsthöheren Stellenwert der Schaltung zugeführt. 6 + 7 = 13, das heißt, im Resultat erscheint eine 3 und das Flip-Flop speichert die 1.
Beim Abarbeiten der nächsten Stelle wird nun nicht 5 + 4 = 9, sondern 5 + 4 + 1 = 10 gebildet. Im Resultat erscheint die 0, der Übertrag wird zwischengespeichert.

Im letzten Schritt ergibt sich 2 + 1 + 1 = 4 und das Übertrags-Flip-Flop wird auf 0 gesetzt.
Die in der Additionsschaltung verwendete Art der Zahlendarstellung heißt Serien-Parallel-Darstellung. Die Binärzeichen jeder einzelnen Dezimalziffer erscheinen gleichzeitig (parallel) auf vier Leitungen, verschiedene Dezimalziffern kommen zeitlich nacheinander (in Serie).

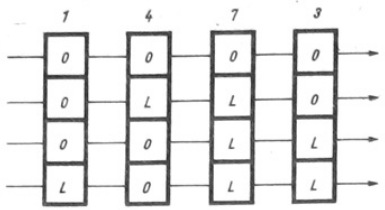


Abbildung 8
Serien-Parallel-Darstellung der Zahl 1473

Analog kann man Lösungen für rein-duale Zahlendarstellung angeben.
Aus den bisher besprochenen Verfahren lassen sich vier Grundtypen für Additionsrechenwerke entwickeln.

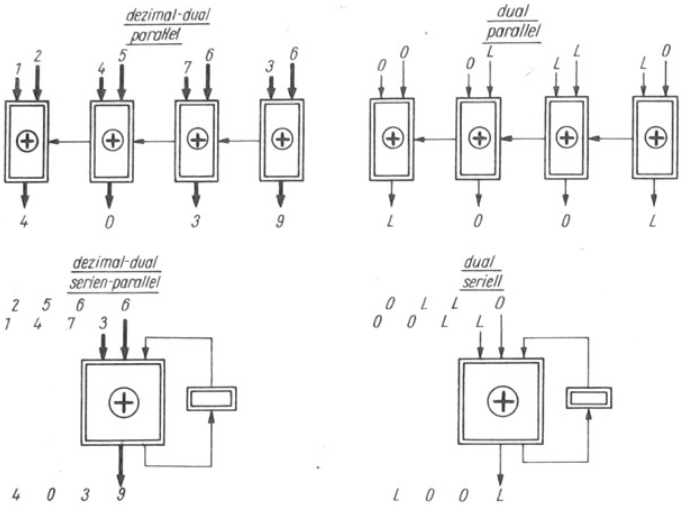


Abbildung 9
Grundtypen für Additionsschaltungen

Am schnellsten, jedoch auch am teuersten ist die Parallelarbeitsweise. In einem Takt, also in wenigen Mikrosekunden, steht das Ergebnis der Addition bereit.
Am billigsten, dafür auch am langsamsten, ist die duale und serielle Arbeitsweise. Die Dauer der Addition wird durch die Anzahl der Dualstellen bestimmt. Im Durchschnitt entsprechen 3 Dezimalstellen 10 Dualstellen.

Ein Mittelweg ist die dezimal-duale Darstellung und die serienparallele Arbeitsweise, sowohl Aufwand als auch Leistung liegen zwischen beiden Extremen. In der Datenverarbeitungsanlage Robotron 300 wurde dieser Weg gewählt.

Auf Möglichkeiten zur Realisierung der Subtraktion soll nicht näher eingegangen werden. Nur soviel sei gesagt, daß dafür ähnliche Grundschaltungen zur Verfügung stehen. Sie arbeiten stellenweise, berücksichtigen den Übertrag usw. In modernen Anlagen werden meist kombinierte Schaltungen für Addition und Subtraktion eingesetzt, die durch Steuerspannungen von einer Operation auf die andere umschaltbar sind.

LEKTION 7

3.2. Multiplikation

Die Multiplikation, eine Grundrechenoperation der 2. Stufe, kann auf einfachere Operationen zurückgeführt werden. In der einfachsten Form ist sie nichts anderes als eine wiederholte Addition.

Multiplikand		Multiplikator		wiederholte Addition		Produkt
3	·	4	=	3 + 3 + 3 + 3	=	12

Es ist einleuchtend, daß dieses elementare Verfahren bei großen Multiplikatoren viel zu lange Rechenzeiten mit sich bringen würde. Der Ablauf wird verkürzt, wenn man dem Multiplikator entsprechend Teiladditionen des Multiplikanden vornimmt und über Stellenverschiebungen die richtige Zuordnung der Summanden erreicht.

Beispiel

2566 · 1473	
2566	
2566	1. Teiladdition (Multiplikatorziffer 3)
2566	
7698	1. Teilsumme
7698	1. Stellenverschiebung
2566	
2566	
2566	2. Teiladdition (Multiplikatorziffer 7)
2566	
2566	
2566	
2566	
187318	2. Teilsumme
187318	2. Stellenverschiebung
2566	
2566	3. Teiladdition (Multiplikatorziffer 4)
2566	
2566	
1213718	3. Teilsumme
1213718	3. Stellenverschiebung
2566	4. Teiladdition (Multiplikatorziffer 1)
3779718	4. Teilsumme = Ergebnis

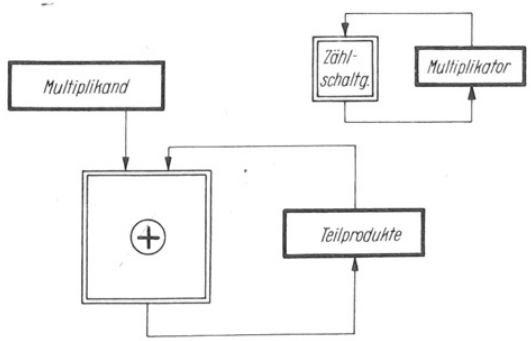


Abbildung 10
Prinzip einer Multiplikationsschaltung

LEKTION 7

Eine sequentielle Schaltung zur Ausführung der Multiplikation benötigt Speicherelemente für den Multiplikanden, den Multiplikator und das Produkt. Außerdem sind ein Addierwerk und eine einfache Zählschaltung für die Abarbeitung des Multiplikators vorhanden.
Im Prinzip läßt sich die Division auf wiederholte Subtraktion zurückführen. Damit können die Baugruppen für die Multiplikation zu wesentlichen Teilen auch für die Division genutzt werden.

4. Addition und Multiplikation im Dualsystem

Die Rechenwerke elektronischer Datenverarbeitungsanlagen führen alle im Abschnitt 3 behandelten Rechenoperationen mit Binärzeichen aus.
Stellen wir nun Grundregeln für Addition und Multiplikation im Dualsystem zusammen. Die Beispiele sind in rein-dualer Darstellung durchgerechnet.

Addition

Grundregeln der binären Addition

0 + 0 = 0
0 + L = L
L + 0 = L
L + L = 0, Übertrag L

Mit diesen Vorschriften werden Dualzahlen nach den gleichen Prinzipien wie Dezimalzahlen addiert.

Dezimal	Dual	
23	L0 LLL	
+ 11	+ L0 LL	
34	(LLLLL)	Übertrag
	L0 0 0 L0	Summe

Multiplikation

Grundregeln der binären Multiplikation

0 · 0 = 0
0 · L = 0
L · 0 = 0
L · L = L

Wie im Dezimalsystem werden mit den Multiplikatorziffern Teilprodukte gebildet und diese nach entsprechender Stellenverschiebung addiert.

13 · 5 = 65
13 ≙ LL0 L
5 ≙ L0 L

LL0 L · L0 L
LL0 L
0 0 0 0
LL0 L
L0 0 0 0 0 L

Die Teilproduktbildung gestaltet sich im Dualsystem sehr einfach. Wird eine Dualzahl mit 0 multipliziert, dann ist das Produkt 0. Wird sie mit L multipliziert, ist das Produkt die Zahl selbst.

In dieser Eigenschaft liegt einer der Vorteile des Dualsystems. Die Multiplikation ist damit zurückgeführt auf ein wiederholtes Notieren des Multiplikanden oder der entsprechenden Anzahl von Nullen, Stellenverschiebung und Gesamtaddition der Teilprodukte.
Für das Verschieben der Teilprodukte haben wir in der vergangenen Lektion eine technische Lösung kennengelernt: die Schiebekette. Durch Impulse werden die Binärzeichenkombinationen nach rechts oder links verschoben und lassen sich in Serien- oder Paralleldarstellung an den Ausgängen abgreifen.

LEKTION 7

Digitale Rechenautomaten

Teil 1

Allgemeine Grundlagen
Grobstruktur
Mathematische und organisatorische Elemente

Fachkunde für Datenverarbeiter
2., durchgesehene Auflage
Etwa 96 Seiten · 23 Abbildungen
Broschur · etwa 3,00 M

Die Fachkunde stellt ein verbindliches Lehrmaterial für die Ausbildungsberufe Datenverarbeiter und Statistiker sowie zur Aus- und Weiterbildung der Werktätigen dar.

Die Arbeit geht besonders auf die allgemeinen Grundlagen, die Grobstruktur und auf mathematische und organisatorische Elemente ein.

Merksätze erleichtern das Erfassen des Stoffes. Durch Aufgaben wird die Verbindung zur Praxis hergestellt. Der Lernende wird damit zum selbständigen Denken und Handeln erzogen.

VERLAG
DIE WIRTSCHAFT
BERLIN